

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 12

1. Die Vereinigten Staaten wollen das derzeitige Niveau ihrer N strategischen Ölreserven erkennen. Sie modellieren das Niveau einer einzelnen Ölreserve mit der Zufallsvariable X . Sie benutzen für X die Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = cx^{-\alpha}1_{\{x \geq \beta\}},$$

wobei $\beta > 0$ and $\alpha > 1$ Parameter sind.

- a) Berechnen Sie die Konstante c . Zeigen Sie, dass $E(X^s) = \frac{(\alpha-1)\beta^s}{\alpha-1-s}$, wenn $\alpha > s + 1$. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\text{Var}(X)$.

Nehmen Sie an, dass der Parameter β bekannt ist. Sie wollen den Parameter α aus einer Stichprobe mit n Beobachtungen schätzen.

- b) Bestimmen Sie den Momentenschätzer und den Maximum-Likelihood-Schätzer für α . Schreiben Sie die allgemeinen Formeln für n Beobachtungen hin.

Für $i = 1 \dots N$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche das Niveau der i -ten Ölreserve repräsentiert. Sei $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ die Zufallsvariable, die das Gesamtniveau der N Ölreserven darstellt.

- c) Wie gross ist etwa die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtniveau der N strategischen Ölreserven eine Mindestgrenze δ unterschreitet? Treffen Sie dabei geeignete Annahmen, und beschreiben Sie diese. Drücken Sie diese Wahrscheinlichkeit mit α , β , N , δ und der kumulativen Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung aus.

2. In einem Sägewerk wird das Schnittholz einer bestimmten Sortierklasse einer Qualitätskontrolle unterzogen. Pro Produktionstag wird eine Stichprobe mit zehn Brettern entnommen und jedes Brett auf seine Steifigkeit getestet. Basierend auf Erfahrung kann angenommen werden, dass die Steifigkeit eines Brettes normalverteilt ist mit bekannter Standardabweichung $\sigma = 1430 \text{ MPa}$ ¹.

¹Das Pascal ist eine abgeleitete SI-Einheit des Drucks sowie der mechanischen Spannung. Sie ist nach Blaise Pascal benannt und folgendermassen definiert: $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg} \times \text{m}^{-1} \times \text{s}^{-2} = 1 \text{ N} \times \text{m}^{-2}$. Ein Pascal ist also der Druck, den eine Kraft von einem Newton auf eine Fläche von einem Quadratmeter ausübt. $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bar}$.

- a) Leiten Sie die Formel des 95%-Konfidenzintervalls für μ nach 15 Produktionstagen her.
- b) Berechnen Sie aus a) das realisierte Konfidenzintervall für einen beobachteten Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 11'000$ MPa (nach 15 Produktionstagen).
- c) Wieviele Stichproben wären nötig, damit die Breite des Konfidenzintervalls kleiner als 200 MPa ist?
3. Sei X eine Zufallsvariable. Wir haben 10 Beobachtungen $(x_1, \dots, x_{10})$. Wir nehmen an, dass $X \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -verteilt ist mit $\mu = 7$. Das arithmetische Mittel ist $\bar{x} = 8$ und die empirische Standardabweichung ist $s = 2.97$.
- a) Führen Sie einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob $\mu > 7$ ist.
- b) Führen Sie den gleichen Test auf dem 20%-Niveau durch.
- c) Welches ist das kleinste Niveau, auf dem der Test die Nullhypothese noch verwirft (d.h. der p-Wert)?
- d) Jetzt haben wir 90 Beobachtungen, wobei $\bar{x} = 8$ und $s = 2.98$. Führen Sie den gleichen Test auf dem 5%-Niveau durch.
- e) Wie gross ist der p-Wert?
4. Welche der untenstehenden Aussagen ist **richtig**?
- a) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ , d.h. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_X(t)$.
1. $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ für $t < \lambda$.
 2. $M_X(t) = \frac{\lambda}{t - \lambda}$ für $t > \lambda$.
 3. $M_X(t) = \lambda$ für $t \in \mathbb{R}$.
- b) Seien $X_1, \dots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. $\sim \text{Be}(\vartheta)$ mit $\vartheta \in [0, 1]$. Wir betrachten die Schätzer $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i$ und $T_2 = X_2$. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?
1. T_1 ist erwartungstreu und T_2 ist nicht erwartungstreu.
 2. T_1 und T_2 sind beide erwartungstreu.
 3. T_1 ist nicht erwartungstreu und T_2 ist erwartungstreu.
- c) Seien $X_1, \dots, X_n$ unter P_ϑ i.i.d. mit endlichem Erwartungswert. Ferner sei $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ für beliebige $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Ist dann Y ein erwartungstreuer Schätzer für $E_\vartheta[X]$?
1. Diese Aussage ist richtig.
 2. Diese Aussage ist falsch.
 3. Es sind zu wenig Informationen vorhanden, um eine Aussage zu machen.

- d) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und binomialverteilt. Ferner sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\delta > 0$. Dann gilt

$$P[S_n \geq (1 + \delta)E[S_n]] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right)^{E[S_n]}.$$

1. Diese Aussage ist falsch.
 2. Diese Aussage ist richtig.
 3. Wir müssen die Parameter der Binomialverteilung kennen, um eine Aussage machen zu können.
- e) Aus einer Urne mit 40 roten und 80 blauen Kugeln wird 27 Mal eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt. Sei A das Ereignis, dass total mindestens 18 rote Kugeln gezogen werden. Welche Aussage ist richtig?

1. $P[A] = \sum_{k=18}^{27} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{27-k}$.
2. Wegen der Chebyshev-Ungleichung gilt $P[A] > \frac{27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{9^2}$.
3. Wegen der Chernoff-Schranke gilt $P[A] \leq \left(\frac{e^1}{2^2}\right)^9$.